CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL FRACTAL CURVA CERRADA DE KOCH

Ximena Gutiérrez-Figueroa, Marcela Parraguez González
Universidad de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ximenagutierrez@u.uchile.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

RESUMEN: La cognición referida a los fractales geométricos y la potencialidad formativa que se proyecta en su incorporación al currículum escolar, han sido los ejes conductores de esta investigación, cuya finalidad ha sido determinar las construcciones y mecanismos mentales que conforman el modelo cognitivo para la curva cerrada de Koch. Con base en una secuencia ya validada para el triángulo de Sierpinski, diseñada bajo el marco teórico APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y sustentada en actividades desarrolladas por estudiantes de forma autónoma, que no conocían del tema, se logró evidenciar una construcción análoga para esta estructura a través del algoritmo constituido por el Iniciador y el Generador.

Palabras clave: fractal geométrico, curva de Koch, marco teórico APOE

ABSTRACT: The cognition related to the geometric fractals and the formative potentiality that is expected to be included in the school curriculum have been the guiding axes of this research, whose purpose has been to determine the constructions and mental mechanisms that make up the cognitive model for the closed curve of Koch. Based on a sequence already validated for the Sierpinski's triangle, designed under APOS(Action, Process, Object, Scheme) theoretical framework, and based on activities developed by students in an autonomous way (that they did not know about the topic) it was possible to demonstrate an analogous construction to this structure through the algorithm constituted by the Initiator and the Generator.

Key words: Geometric fractal, Koch curve, APOS theoretical framework)

Introducción

La investigación se inicia por la fuerte convicción de que la Didáctica de la Matemática (DM) o Matemática Educativa, es una disciplina que puede proveer mejores respuestas frente al problema de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, no solo en nuestro país. En este sentido, sostenemos que es la disciplina que puede aportar las mejores preguntas en torno a la observación de dicho proceso en que se pone a prueba el sistema didáctico fundamental: conocimiento-profesor-estudiante. Este estudio se centró en considerar a los fractales como un conocimiento posible de abordar en el aula y por sus características especiales, específicamente las ligadas a la iteración y autosimilitud de sus formas en distintas escalas. Sostenemos que estas estructuras pueden proyectarse como asimiladores de variados conceptos matemáticos, que por lo general son tratados fragmentadamente en la escuela, y así promover una enseñanza más integral y ligada a aspectos que se relacionan con la naturaleza, fenómenos sociales y económicos por citar algunos.

El fractal geométrico triángulo de Sierpinski (TS), fue construido a nivel de Totalidad por estudiantes de educación secundaria que no conocían sobre el tema. En base a estos resultados se proyectó una nueva secuencia de actividades que en esta oportunidad contempló otro fractal geométrico, la curva de Koch (CK). Se pudo observar algunos conocimientos que emergen asociados a su construcción y obstáculos ligados a la geometría euclidiana que emergen en el desarrollo de la secuencia. El objetivo general que guía esta investigación es la formulación de un modelo cognitivo para el aprendizaje de los fractales. En lo específico, indagar en las construcciones y mecanismos mentales comunes que caracterizan a una familia de fractales y determinar cuáles son las relaciones de significado entre sujeto-objeto, para potenciar su aprendizaje en estudiantes de nivel básico y secundario.

Algunos antecedentes

La reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, específicamente sobre las formas geométricas, la experiencia en aula, la observación de clases, la supervisión programas de formación continua docente, y las labores desempeñadas en organismos educacionales gubernamentales permiten levantar premisas sobre la necesidad de remirar no solo las estrategias de enseñanza de los profesores que ejercen en el sistema educativo, sino también sobre los énfasis del currículum. El currículum chileno viene desarrollando modificaciones al menos, durante los últimos 10 años. La evolución de las temáticas en el eje de Geometría del currículum nacional se desarrollan desde los cursos de educación básica, inicialmente en relación a la comprensión de las formas, la caracterización y relaciones simples entre estas y su representaciones cartesianas. Continúa con la medición de perímetros, áreas y volúmenes y con movimientos rígidos de figuras en el plano (Ministerio de Educación, 2010). En el plan común de estudios del currículum chileno, los aprendizajes relacionados con Geometría se desarrollan en su mayoría en torno a la axiomática de Euclides, dejando para los cursos del plan diferenciado –estudiantes que eligen profundizar en la asignatura– del último año de educación secundaria, algunas temáticas que aluden a fractales, como las iteraciones en torno a procesos infinitos (Ministerio de Educación, 2005).

La construcción cognitiva que lograron en forma autónoma estudiantes de educación secundaria que no sabían del tema fractales, a partir de una secuencia didáctica donde se presentaron actividades formuladas a partir del iniciador y el generador del TS, motivó a las investigadoras a profundizar en los elementos que permiten la cognición de este tipo de estructuras autosemejantes. Los fractales no forman parte del currículum escolar de nuestro país, sin embargo ya tenemos evidencia de su potencial formativo, al involucrar diversos conceptos de la propia Matemática y a su vez dotar de significado intrínseco a sus representantes geométricos.

La potencialidad formativa de los fractales

Una variedad de investigaciones muestran a los fractales como elementos que se relacionan con distintas áreas de la ciencia y la cultura. En Restrepo y Velásquez (2012), se analizaron algunos comportamientos de mercados financieros concluyéndose que podían ser analizados mediante herramientas provenientes de la geometría fractal, con lo cual se podría acceder a nuevas formas de transacción en la bolsa. Por otra parte, las estructuras fractales también han dado explicaciones a ciertas propiedades de órganos humanos los que se asemejarían a estas formas dotando a los mismos de un mejor funcionamiento a nivel morfológico (Fossión, 2010) como se observa en la Figura 1.

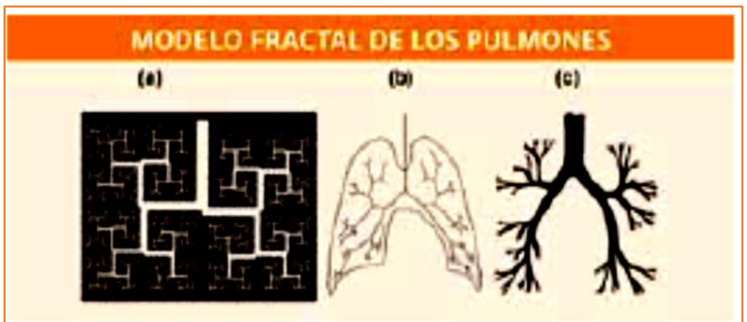


Figura 1. Complejidad espacial de la estructura de los pulmones. (a) Los pulmones maximizan su área "ahuecando" un espacio libre en el pecho a través de bifurcaciones sucesivas de los bronquios. Figura adaptada de Mandelbrot (1982). (b) Modelo fractal más realista que toma en cuenta los bordes. (c) Pulmón esquemático realista. Ultimas dos figuras adaptadas de Nelson y Manchester (1988).

Figura 1. Modelo fractal de los pulmones (Fossion, 2010, p. 173)

Otro tipo de estudios más ligados a la enseñanza presentan estrategias metodológicas para trabajar con los fractales a nivel de educación superior o de bachillerato, aportando actividades prácticas y teóricas en el aula. Algunos de estos trabajos incluyen el uso de material concreto para su compresión representando fractales mediante figuras en dos y tres dimensiones.

La noción de infinito es un tema recurrente donde los fractales son propuestos como objetos para investigar sobre esta noción no menos relevante, por ejemplo, la construcción de la curva cerrada de Koch, estaría más ligada a la noción de infinito potencial que a la de infinito actual (Oviedo, Kanashiro, Benzaquen y Gorrochategui, 2006). Otros estudios del infinito en el que se incluye el uso de la computadora, usan las características recursivas de los fractales para tales fines la herramienta resultó ser útil como verificación para modelos discretos (Moreno y Sacristán 1996). A partir de un código computacional, estos investigadores trabajaron con los estudiantes usando computadora para apoyar las relaciones entre estructuras cognitivas y la formalización. Para los estudiantes fue positivo observar cómo se construyen las primeras etapas del fractal de Koch, esto permitió la mejor comprensión de estas relaciones a partir de una estructura recursiva que puede producir distintas formas de mirar el infinito.

La naturaleza fractal es mucho más compleja de lo expresado anteriormente, sin embargo resalta la posibilidad de que a partir de algunos algoritmos muy sencillos los estudiantes puedan construir algunos de sus representantes más conocidos y a partir de sus relaciones con distintas ramas del conocimiento se potencien aprendizajes más significativos que motiven el acercamiento a las ciencias y al conocimiento. Los fractales geométricos se caracterizan por mantener su estructura a cualquier escala en que se observen, es decir su autosimilitud, los distinguen de otros objetos matemáticos (Mandelbrot, 1997). A su vez, el proceso de construcción iterativo confiere a estas estructuras un dinamismo que también puede ser descrito mediante un proceso aleatorio con resultados deterministas. Como se ha señalado, los fractales no están incorporados en el currículum obligatorio, sin embargo la potencialidad de su tratamiento en la escuela está ligada a las posibilidades de desarrollar una matemática más integrada donde diversos conceptos convergen en torno a un objeto de la Matemática que por otra parte modela diversos fenómenos ligados a la vida cotidiana, como el organismo humano, comportamientos sociales, el clima, entre otros.

Marco teórico para abordar el estudio

El modelo cognitivo que guio nuestro trabajo se desarrolló a partir de la Teoría APOE, (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) creada por Dubinsky (1991) y desarrollada por otros investigadores (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014). Los supuestos teóricos de APOE se estructuran a partir de la epistemología cognitiva de Piaget, enfocada en el individuo, que es quien reflexiona sobre un problema matemático haciendo uso de esquemas mentales en los que se construyen y reconstruyen ciertas estructuras cognitivas. Así, esta teoría permite explicitar a priori, los elementos señalados para que un estudiante, o un grupo de ellos, pueda tener acceso a tal conocimiento o a parte de este dependiendo del nivel de enseñanza al que pertenezca. Entendemos por acceso, al aprendizaje de dichos conocimientos. La teoría presenta su propia metodología de investigación en la que se incluye un ciclo de trabajo en grupo de los estudiantes que puede permitir el aprendizaje del concepto que se quiere enseñar.

Elementos metodológicos

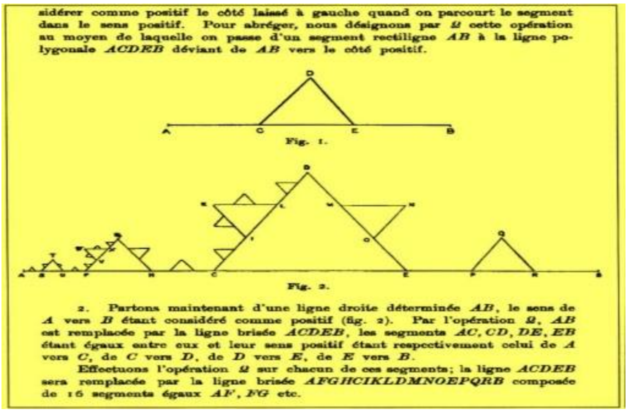
Este proyecto se inscribe en el paradigma de la investigación cualitativa, principalmente por estar enfocado en la comprensión más profunda de los fenómenos a partir de la exploración y la experimentación en un entorno de enseñanza y aprendizaje de un concepto de la Matemática. Como ya se ha señalado la intención principal es observar cómo responden estudiantes a las actividades que se diseñaron con el objetivo de evidenciar los elementos que se pretendían interpretar a la luz de la DG. Este proceso de estudio así definido, está marcado fuertemente los las formas de interpretación y la búsqueda de significados sobre las producciones de los estudiantes (Sampieri, 2014). Estos procesos son encausados por el marco teórico puesto en acción. Se pretende, a partir de un estudio cualitativo comprender en profundidad el discurso de los informantes, de dos casos de estudio (Stake, 2010), el primero un grupo de estudiantes de educación primaria (10 a 11 años de edad) y otro de educación secundaria (16 a 17 años de edad).

Para proponer el diseño metodológico basamos nuestra postura en el convencimiento de que la actividad experimental de la Didáctica de la Matemática cobra su máximo sentido al convertirse en el eslabón entre la Matemática misma y los problemas de aprendizaje de porciones de este conocimiento que son abordados en el aula. Otorga en este sentido, respuestas eficaces a partir del estudio de elementos que interfieren o potencian el acceso al conocimiento conectando ambos polos a partir de la experimentación. En coherencia con los objetivos del estudio se levantó información teórica y empírica para determinar posibles recorridos viables en la construcción de fractales geométricos como la CK. El ciclo de investigación que provee APOE fue aplicado en este estudio considerando los objetivos del estudio, y los antecedentes que se disponen a la fecha. Las componentes del ciclo: Análisis teórico, Diseño e implementación de la instrucción y, Recolección y análisis de datos, se resumen en la sección que sigue.

Análisis teórico

Particularmente, nos acercamos a la CK, tomando algunas de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética (DG) que modela la construcción del fractal TS, planteada en Gutiérrez (2014), bajo la hipótesis de que habrá una construcción análoga para ambos fractales. La DG es la concreción de un análisis teórico que consistió en el estudio de los fractales a partir de diversos antecedentes, como un estudio histórico-epistemológico acerca de los fractales que revela la complejidad del concepto al punto de poder ser abordado desde distintas miradas como lo señala

Chabert (1990) aludiendo a la evolución analítica, geométrica y experimental de este concepto. La aparición de funciones continuas sin derivada propició un cambio de paradigma en torno a unos nuevos entes hacia 1856, aquellas funciones continuas sin derivada, las que se desarrollaron a partir de la actividad de algunos matemáticos connotados de la época, siendo Weierstrass quien presentó ante la comunidad científica una función continua no diferenciable (Plaza, 2000). En su evolución geométrica, Bolzano habría construido algunos años antes, un ejemplo de fractal que consistía en una secuencia de líneas poligonales y en sustituir en cada paso, los segmentos de dicha poligonal, por otras poligonales de 4 segmentos cada vez, manteniendo los extremos del segmento original. Es decir en cada paso se producen más y más puntas presentando puntos de no derivabilidad de la función. Una representación geométrica clásica fue propuesta por Von Koch hacia 1904 cuando presenta una curva continua basada en una construcción geométrica simple (Figura 2).



sidérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

Fig. 1.

Fig. 2.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Figura 2. Construcción original de la curva de Koch (Peitgen, Jürgen y Saupe, 2004, p. 87).

Además de este estudio se recurrió a textos especializados de Matemática y otras investigaciones ligada a los fractales donde se evidenció su potencialidad como representante de variados fenómenos de la naturaleza y otros ámbitos de las ciencias y la cultura.

Diseño e implementación de la instrucción

A partir de la DG para el TS, la que fue documentada por nueve estudiantes de educación secundaria en 2014, de diseñó un cuestionario con las mismas preguntas pero adaptando la situación problema al fractal en estudio, así de determinaron dos formas: una para la curva abierta de Koch y otra para la curva cerrada de Koch. En la Figura 3, se muestran el Iniciador (izquierda) y Generador (derecha) de cada fractal.

Figura 3. Algoritmo de la construcción geométrica para curva abierta y curva cerrada de Koch

Esta primera parte del estudio consideró las siguientes construcciones y mecanismos de la DG:

- Acciones sobre una poligonal abierta y sobre el triágulo equilátero
- Procesos Iniciador y Generador
- Proceso Iteración
- Procesos de Autosimilitud

Los cuestionarios se han aplicado a diversos estudiantes de educación secundaria (16 a 17 años) quienes han desarrollado algunas de las construcciones previstas.

Análisis de datos y conclusiones

El análisis de los datos obtenidos evidencia que la construcción de la CK ha tenido mayores dificultades que la del TS, sin embargo, algunos estudiantes pueden mostrar algunas construcciones del modelo según se presenta en las siguientes figuras. En la Tabla 1 se muestra el trabajo de estudiantes, que fue interpretado a partir de las estructuras mentales, de acciones o procesos, de algunos conceptos claves para los fractales geométricos en estudio.

Construcciones mostradas por los estudiantes.

-Acciones sobre el Iniciador:


1 c)
Lo mas facil es el Traslado de los segmentos para crear
La figura

Figura 4. Caso de la CK cerrada

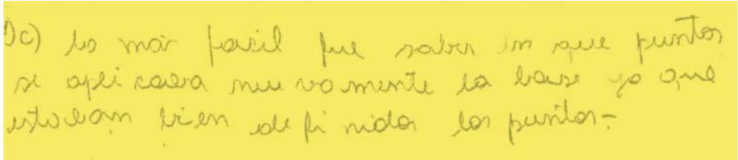


Figura 5. Caso de la CK abierta

Proceso de Iteración y Autosimilitud

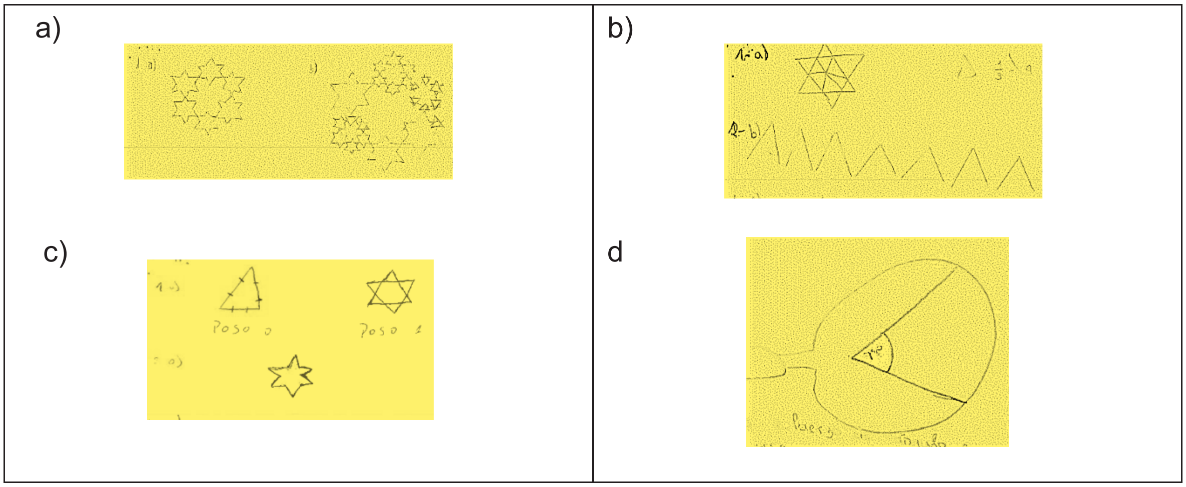


Figura 6. Caso de la CK cerrada

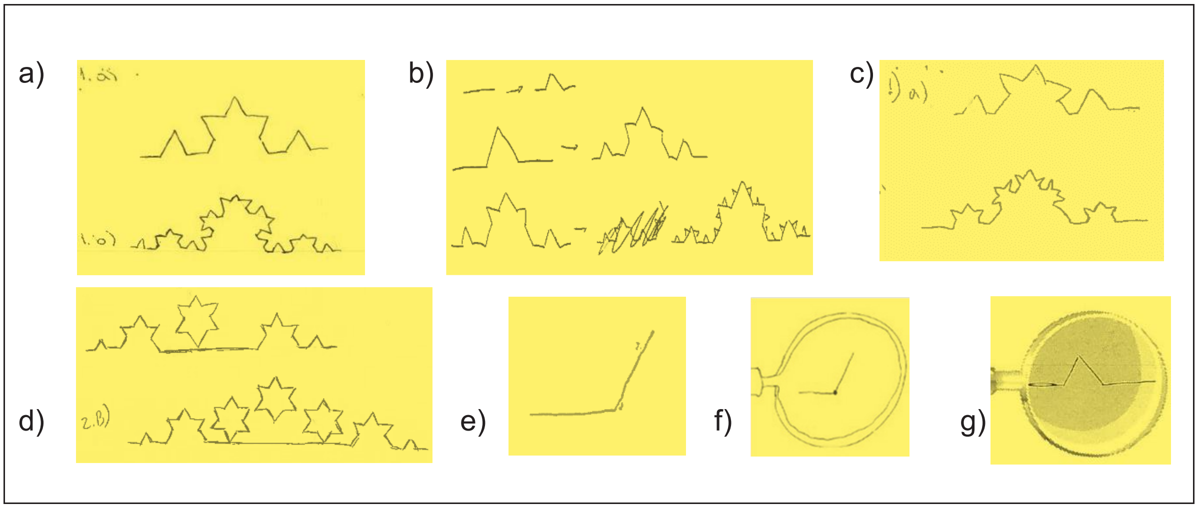


Figura 7. Caso de la CK abierta

A partir del algoritmo (Figura 3), algunos estudiantes pueden construir I2, I3 (Figura 7.a y 7.b), de la curva abierta y la Autosimilitud Figura 7.g). Las construcciones para la curva cerrada aún no se evidencian como se observa en la Figura 6.

Con base en lo recopilado en ambos casos, se sostiene que las componentes para un modelo cognitivo de los fractales geométricos serían: Acciones sobre objetos geométricos ya conocidos, como el triágulo equilátero, y poligonales abiertas, Procesos como el de la Iteración construido por la coordinación del Iniciador y el Generador, y el Proceso de Imágenes fractales. Se hace necesario levantar evidencia para sustentar el modelo cognitivo DG, para un conjunto de fractales goemétricos referido a los ámbitos geométricos y analíticos que progresen de manera similar a la evolución que se evidenció con el triángulo de Sierpisnki en Gutiérrez (2014). Las dificultades presentadas en la CK, podrían deberse a la configuración geométrica que en cada iteración exige ir eliminando los segmentos centrales y también al enfrentarse a la fraccionar segmentos en tercios (Figuras 6.b y 6.c)

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Chabert, J. (1990). Un demi-siecle de fractales: 1870-1920. *Historia mathematica 17,*(4), 339-365.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Fossión. R. (2010). Una definición compleja de la fragilidad: caos, fractales y complejidad en series de tiempo biológicas. En M. López y G. Ríos (Eds.), *Envejecimiento humano. Una visión Transdisciplinaria* (pp. 171-183). México D.F.: Instituto de Geriatría.

Gutiérrez, X. (2014). *Una descomposición genética del fractal triángulo de Sierpinski* (Tesis de magíster no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza* (2a ed.). Barcelona: Tusquets Editores, S.A.

Ministerio de Educación. (2005). Matemática. Formación Diferenciada Humanístico-Científica. En *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media. Actualización 2005* (pp. 237-240). Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2010). *Mapa de progreso del aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría*. Santiago: Autor.

Moreno, L. y Sacristán, I. (1996). Representaciones conceptuales y procesos recursivos. *Revista EMA*, *1*(2), 83-96.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Benzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2006). Una aproximación a la noción de infinito a través de fractales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19*. (1015-1020). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Peitgen, H., Jürgen, H. y Saupe, D., (2004). *Chaos and Fractals* (2 a ed.). New York: Springer.

Plaza, S. (2000). *Fractales y generación computacional de imágenes*. Perú: Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA.

Restrepo, J. y Velásquez, H. (2012). Análisis del índice general de las bolsas de valores de Colombia y sus rendimientos desde la teoría del caos 2001-2011. *Semestre Económico. Vol. 15* (31), 79-98.

Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México: McGraw-Hill.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.